

## Información Importante

La Universidad de La Sabana informa que el(los) autor(es) ha(n) autorizado a usuarios internos y externos de la institución a consultar el contenido de este documento a través del Catálogo en línea de la Biblioteca y el Repositorio Institucional en la página Web de la Biblioteca, así como en las redes de información del país y del exterior con las cuales tenga convenio la Universidad de La Sabana.

Se permite la consulta a los usuarios interesados en el contenido de este documento para todos los usos que tengan finalidad académica, nunca para usos comerciales, siempre y cuando mediante la correspondiente cita bibliográfica se le de crédito al documento y a su autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, La Universidad de La Sabana informa que los derechos sobre los documentos son propiedad de los autores y tienen sobre su obra, entre otros, los derechos morales a que hacen referencia los mencionados artículos.

**BIBLIOTECA OCTAVIO ARIZMENDI POSADA**  
UNIVERSIDAD DE LA SABANA  
Chía - Cundinamarca

**Optimización de Portafolios con enfoque Bayesiano: aplicación a los  
Multifondos de las Pensiones Obligatorias en Colombia.**

Trabajo de Proyecto de Grado

Presentado a la  
Escuela de Ciencia Económicas y Administrativas

**Por**  
**Diana Paola Arteaga Blanco**

**Asesor**  
**Javier Bonza**  
**Profesor Cátedra**

Proyecto de Grado Economía y Finanzas Internacionales

Universidad de la Sabana  
Economía y Finanzas Internacionales

Chía, Diciembre 2013

# **Optimización de Portafolios con enfoque Bayesiano: aplicación a los Multifondos de las Pensiones Obligatorias en Colombia.**

## **Resumen**

Este documento se ocupa de revisar la práctica sobre asignación estratégica de activos, aplicada al caso de inversiones de largo plazo como lo son los Fondos de Pensiones Obligatorias. Adicionalmente, el presente documento introduce un enfoque alternativo basado en la optimización del portafolio, el cual pretende aplicar una metodología fundamentada por Black-Litterman cuyo enfoque es calcular los retornos esperados de mercado como una combinación de un conjunto de expectativas específicas de cada inversionista y un punto de referencia neutral. El propósito es hacer un análisis detallado de cada uno de los

componentes del modelo Black-Litterman y realizar una aplicación del modelo al caso de los Multifondos de pensiones obligatorias en Colombia, que nos permita analizar cuál debe ser la combinación de largo plazo de activos que deben tener los portafolios que administran las AFP.

## **Abstract**

This paper focuses on reviewing practice strategic asset allocation, applied to the case of long-term investments such as Mandatory Pension Funds. Additionally, this paper introduces an alternative approach based on the optimization of the portfolio, which aims to apply a methodology based on Black-Litterman whose approach is to calculate the expected returns of the market as a combination of a set of specific expectations and investor neutral reference point. The purpose is to make a detailed

analysis of each of the components of the Black-Litterman model and perform an application of the model to the case of mandatory pension funds in Colombia, allowing us to analyze what should be the combination of long-term assets portfolios should be managed by the AFP.

### **Estado del arte**

El alto desarrollo cuantitativo que está siendo aplicado al área de las finanzas ha hecho que las matemáticas financieras que antiguamente consistían en manipular eficientemente la relación de dinero con el tiempo presenten hoy en día nuevos desafíos. Por ejemplo: Duración, Convexidad, Deltas, Gammas, Value at Risk, varianzas, Razón de Información, Teoría de Valores Extremos, Métodos de Simulación de Monte Carlo, etc., elementos que se han venido manejando para la optimización de portafolios.

Este marco teórico pretende dar un barrido general de dos modelos usados para las selecciones de portafolios de inversión y los últimos estudios temáticos que se han realizado para las pensiones obligatorias en Colombia, en el tema de optimización de portafolio. Los modelos a desarrollar son Markowitz, y Black Litterman (enfoque bayesiano), modelos que han seguido vigente por su tradición y sus herramientas prácticas para la asignación de activos.

La teoría de modelización de portafolio empieza con Harry Markowitz en 1952 con su artículo “*Portfolio Selection*”. Con esta apertura se logra obtener diferentes formas para la selección de un portafolio eficiente. De acuerdo con Markowitz se encuentran dos etapas para la selección del portafolio: la primera es observar datos históricos y tener en cuenta la

experiencia, la segunda es seleccionar el portafolio teniendo en cuenta las creencias sobre el futuro. Markowitz comienza con la hipótesis de maximización de retornos y de minimización de la varianza de los retornos (media-varianza).

Según (Sherer & Martin, 2005) la eficiencia de media-varianza descansa sobre una base teórica firme, la cual expone que si los inversionistas presentan una función de utilidad cuadrática, la cual significa que el inversionista es adverso al riesgo, es entonces cuando Markowitz comienza a considerar que la diversificación sería la mejor opción para terminar por disminuir el riesgo de pérdidas.

La diversificación de un portafolio se entiende como un conjunto de activos financieros, donde las diferentes combinaciones que se puedan ser realizadas teniendo en cuenta los siguientes

criterios: el primero que el valor esperado de los retornos sean mayores a cero; el segundo es escoger la combinación de los activos financieros que presenten la mínima varianza y el tercero encontrar los activos financieros que tenga una correlación cercana a cero.

Al obtener las diferentes combinaciones de valores esperados y varianzas de cada portafolio, el inversionista escoge el que le ofrezca un mayor rendimiento con una mínima varianza, combinaciones conocidas como la “Frontera Eficiente”.

Al ver que el estudio realizado por Markowitz era convincente y altamente relevante para un financista en el momento de inversión, puesto que era un modelo muy sensible ante los cambios en el tiempo, falencias que repercutían para la administración práctica del portafolio. Cuando se ven estas

falencias en la optimización de portafolio, motivan Fisher Black y Robert Litterman a trabajar en un modelo de elección de portafolio.

Según (Black & Litterman, 1992) la metodología de Markowitz presentaba una inconsistencia, la cual era que cuando se presentaba cambios en las ponderaciones de los portafolios se llegaba a que el vector de retornos presentara soluciones de esquina, soluciones no óptimas para el inversor.

El modelo Black-Litterman (MBL) fue ideado para dar una solución adecuada a los problemas del enfoque tradicional de Markowitz y hacer mas practicas, las herramientas cuantitativas para una buena selección en la asignación de activos. El MBL propone una metodología Bayesiana para la estimación de los retornos esperados. (Castillo, 2006) Considera que la estadística bayesiana ha tomado una

contribución muy importante a la práctica para la toma de decisiones, ya que ha permitido estructurar y modelar probabilidades sujetas a los problemas de toma de decisiones.

Según Mendoza (2012) el MBL difiere de Markowitz en la construcción de los retornos esperados mientras conserva la estructura general del modelo tradicional y el aporte del MBL que es posible considerar una estructura conjunta de verosimilitud de las visiones subjetivas (prior) y datos empíricos. Por lo tanto, es posible imaginar que los retornos basados en el modelo tradicional pueden ser considerados con una nueva visión, la cual son las opiniones de los inversionistas para formar nuevas opiniones de inversión.

En la ecuación (1) encontramos la intuición del teorema bayesiano en el MBL, donde la probabilidad de que ocurra

el evento  $P = (A_i)$  son las probabilidades priori;  $P = (B/A_i)$  es la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurrió A y  $P = (A_i/B)$  es la probabilidad a posteriori, en pocas palabras el teorema bayesiano  $p(A_i/B)$  es la probabilidad de que ocurra el evento A dado que ocurrió B, donde según Black y Litterman es la introducción de las opiniones de los inversionistas .

$$p(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{p(B)} \quad (1)$$

El MBL tuvo como objetivo incluir situaciones prácticas, para ello el inversionista establece un mercado de equilibrio donde se esperaba generar una estructura de retornos de equilibrio, donde el vector  $\Pi$  se refiere a la oferta y demanda en el mercado financiero sobre-simplificada en el mundo real proporcionado por los datos. Por

otra lado, también especifica sus (views) del mercado en la forma de retornos esperados sobre los títulos o activos del portafolio y su nivel de confianza para cada uno de ellos.

Las views son combinadas con los retornos de equilibrio y su resultado constituye los retornos esperados MBL. Concluyendo que el portafolio de equilibrio está en función de la confianza sobre la conjetura realizada por el administrador en relación con el equilibrio del mercado.

La metodología de Black-Litterman permite al inversionista combinar sus “views” de los retornos de diversos activos con los retornos de equilibrio. Donde el retorno “combinado” de (MBL) dependerá en gran medida del nivel de confianza que el inversionista tiene sobre el pronóstico de mercado (views).

Con los dos modelos encontramos que uno con otro se complementan

ya que el modelo de Markowitz es la base de la teoría de selección y el MBL es la parte práctica más precisa para la optimización de portafolios. Estos modelos presentan varias ventajas, como lo son: la flexibilidad, la inclusión de las expectativas de mercado, poder tomar riesgo a un nivel de confianza, tener estabilidad en el tiempo gracias a los retornos de equilibrio.

El encontrarse con estas ventajas hace que hoy en día encontremos que los fondos de pensiones en Colombia adopten estos modelos como pilar para su desempeño financiero.

En Colombia las pensiones obligatorias son un sistema general de ahorro programado para la vejez o jubilación, invalidez y supervivencia. Las pensiones son administradas por los fondos de pensiones (AFP), la cual se encarga de que las personas cumplan la ley

100 de 1993, reforma que fue instaurada para crear un Sistema General de Pensiones y el Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad.

Los fondos de pensiones obligatorias años después adoptaron la ley 1328 de 2009, la cual habla sobre los Multifondos en las pensiones obligatorias, Multifondos que se dividen en cuatro fondos: el Conservador, Moderado, Mayor Riesgo y Retiro Programado.

Las personas que se vinculan a los fondos de pensiones obligatorias son aquellas que están vinculadas mediante contrato de trabajo, servidores al público o también pueden ser trabajadores individuales, ahorradores que no se encuentren excluidos por la ley 100 de 1993. Según el decreto 2372 de 2010, artículo 6 propone la regla de convergencia, regla que nos da una



noción de las edades de cada género para la obtención de su pensión.

En la tabla (1), se encontraran las edades por género y los porcentajes que serán otorgados a los aportes existentes en la fecha en que se cumplan las edades señaladas en la tabla. Para el año 2014 se tendrá una modificación de dos años para cada género por ley.

Tabla (1)

EDAD		SALDO MINIMO DE LA CUENTA INDIVIDUAL EN EL FONDO DE PENSIONES OBLIGATORIAS
MUJER	HOMBRE	
50	55	20%
51	56	40%
52	57	60%
53	58	80%

Fuente: elaboración propia con información de Colfondos pensiones y cesantías.

Al ya tener las edades estipuladas para cada género ,en las pensiones obligatorias hoy en día también encontramos que las personas pueden tomar su perfil de riesgo, perfil que es conocido como

conservador, moderado o de mayor riesgo. Estos perfiles se comienzan a manejar, ya que los Multifondos tratan el tema de optimización de portafolio según su nivel de riesgo.

Los perfiles de riesgo son entendidos como el nivel de tolerancia al riesgo. En el perfil conservador encontramos que es la persona que procura la preservación del capital, mediante inversiones mayoritarias en renta fija, de acuerdo con los límites que para el efecto reglamente la ley; en el perfil moderado se encuentra la persona que busca el crecimiento del capital con un riesgo moderado, mediante inversiones en renta fija, renta variable e inversiones alternativas de acuerdo a lo estipulado por la ley; y en el perfil de mayor riesgo se encuentra la persona que busca el crecimiento del capital en forma agresiva, con inversiones mayoritarias en renta variable.

Los ahorradores en las pensiones obligatorias, pueden escoger su perfil de riesgo, ya que las AFP proponen tres perfiles los cuales ya fueron nombrados anteriormente.

Estos perfiles se encuentran regulados por la Superintendencia Financiera y administrados por las AFP, esta regulación es propuesta por el decreto 2555 de 2010, con la última modificación en el artículo 2.6.5.1.2, en el cual se establece que: La Rentabilidad mínima, que deberán garantizar las administradoras de cada uno de los tipos de fondos de pensiones obligatorias, será la que resulte de calcular el retorno mínimo, que se obtenga de combinaciones de clases de activos representativos de las inversiones de cada tipo de fondo de pensiones obligatorias<sup>1</sup>.

En el cuadro (1), (2) Y (3), se encontraran los rangos de participaciones para cada una de las

clases de activos, para cada uno de los tipos de fondos administrados por la AFP.

### **Cuadro (1). Fondo Conservador**

<b>Clase de activo</b>	<b>Mínimo (%)</b>	<b>Máximo (%)</b>
Renta variable local	<b>10</b>	<b>15</b>
Renta fija local	<b>45</b>	<b>80</b>
Renta variable Internacional	<b>5</b>	<b>15</b>
Renta fija Internacional	<b>2</b>	<b>10</b>
Deposito a la vista	<b>0</b>	<b>5</b>

Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito: Resolución de Rentabilidad mínima para las AFP.

### **Cuadro (2). Fondo Moderado**

<b>Clase de activo</b>	<b>Mínimo (%)</b>	<b>Máximo (%)</b>
Renta variable local	<b>30</b>	<b>35</b>
Renta fija local	<b>35</b>	<b>50</b>
Renta variable Internacional	<b>10</b>	<b>25</b>
Renta fija Internacional	<b>5</b>	<b>20</b>
Deposito a la vista	<b>0</b>	<b>5</b>

Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito: Resolución de Rentabilidad mínima para las AFP.

<sup>1</sup> Ministerio de Hacienda y Crédito Público

### **Cuadro (3). Fondo de Mayor Riesgo**

<b>Clase de activo</b>	<b>Mínimo (%)</b>	<b>Máximo (%)</b>
Renta variable local	35	45
Renta fija local	25	35
Renta variable Internacional	25	40
Renta fija Internacional	10	25
Deposito a la vista	0	5

Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito: Resolución de Rentabilidad mínima para las AFP.

Jara (2006) analiza y da unos ejemplos de que la regulación propuesta y la administración de las AFP no son eficientes para la optimización de portafolio, es decir que la regulación no era la adecuada para los ahorros de los afiliados del sistema de pensiones obligatorias. En el paper de Jara (2006), se encuentra un análisis de regulación versus optimización de portafolios donde el modelo a trabajar fue el enfoque media-varianza que generaliza la

optimización de los portafolios de las AFP, teniendo un perfil de retorno esperado, algo similar al retorno propuesto por el Fondo de Pensiones. Al desarrollar el modelo encuentra que el portafolio propuesto por las AFP y el propuesto por él con algunos cambios en la regulación no alcanza a llegar a la frontera eficiente, en pocas palabras; los incentivos propuestos por las AFP y la regulación por la Superintendencia Financiera no son lo más eficiente para la maximización de la utilidad de los ahorradores.

Después del aporte de Jara, se han encontrado más estudios sobre la ineficiencia de la regulación y en otros sentidos, se ha encontrado a Murcia & Martínez (2007) agregando que la ineficiencia de los fondos aparte de la regulación, presenta otros factores que provocan dicha ineficiencia. Los factores encontrados por Murcia &

Martínez (2007) son: primero que en la optimización se presenta un incremento en los indicadores de riesgo; segundo que se ha presentado una concentración en los activos internos lo cual lleva a que la volatilidad sea alta para los ahorradores; tercero que los altos costos de comisiones cobrados por los Administradores de Fondos hacen que las utilidades de los ahorradores sean bajas por unidad de riesgo y por último; que no se tiene un buen manejo del riesgo de portafolio.

Al presentarse ya varios factores de ineficiencia para la optimización de portafolio, se encuentran otros estudios para los fondos de pensiones obligatorias de cómo obtener una buena optimización con la regulación propuesta. En el fondo de pensiones Skandia realizan una investigación de cómo crear un portafolio de inversión para fondos de pensiones, donde según

Berggrun & Camacho (2009) la teoría fundamental para la optimización de portafolio es la de Harry Markowitz (1952), teoría que ha sido trabajada bajo el supuesto de Media- Varianza. Al terminar Berggrun & Camacho (2009) el enfoque Media- Varianza para el fondo de pensiones llegan a la conclusión de que los portafolios contruidos deberían ser escogido según el perfil de riesgo ya que con el este modelo ante cualquier cambio en la proporción de un activo hace que los cambios en la rentabilidad sean muy notorios en pocas palabras, el modelo de Markowitz es muy sensible ante cualquier cambio.

A pesar de encontrar que el modelo de Markowitz era muy sensible ante cualquier cambio, encontramos otro estudio de Media-Varianza para los Multifondos de las pensiones obligatorias en Colombia. Estudio donde Gracia & Moreno (2011)

realizaron la optimización de portafolio para cada uno de los Multifondos, los cuales son el conservador, moderado y agresivo.

Gracia & Moreno (2011) incluyeron tres cosas muy importantes; la primera que los fondos en término de rentabilidad podrían tener un futuro más abierto, si los límites de inversión por los instrumentos financieros no presentaran una regulación tan ineficiente; la segunda fue que cuando se obtuvo la frontera eficiente (FE), se observó que los puntos de acuerdo con la ley 100, los fondos de pensiones conservador, moderado y agresivo se encontraban por debajo de la frontera, lo que termina por resumir que ellos no se encontraban en la frontera por que ante cambios como crisis internacionales y revaluación del peso terminarían por afectar a los Multifondos y por último que los Multifondos al ser muy

resistentes no presentan una serie de tiempo muy larga, lo cual no satisface completamente las mejores estimaciones que logren mostrar la eficiencia de la metodología en el largo plazo.

Al encontrarse que el modelo de Media-Varianza presentaba algunas falencias, pero que era el modelo pionero para la optimización de portafolios, se comenzó a tener unas mejoras sobre este modelo. Según Trujillo (2009) los fondos de pensiones obligatorias no deberían solo tener un enfoque Media-Varianza, si no que se debería tener un nuevo enfoque el cual es el enfoque Bayesiano. Este enfoque se realiza con el modelo de Black Litterman el cual es una herramienta de construcción de portafolio muy práctica en este caso para los fondos de pensiones, ya que la administradora de portafolios debería usar este modelo de forma interactiva hasta que los resultados

arrojados sean coherentes con su expectativas y que el procedimiento de optimización sirva como un instrumento de calibración.

Por otro lado Trujillo (2009) considera que en el caso de los fondos de pensiones obligatorias en Colombia (FPO), la aplicación del modelo BL produce unos portafolios más diversificados y mucho más intuitivos que los que se habían obtenido con la metodología tradicional Media-Varianza. Al notarse que al implementarse el modelo de Media- Varianza con otras teorías y otros enfoques.

De acuerdo con el paper *Análisis de eficiencia de los portafolios de pensiones obligatorios en Colombia* (2005), se encuentra un nuevo análisis para los fondos de pensiones Obligatorias en Colombia, ya que con su estudio se realiza una construcción de la frontera eficiente teniendo en

cuenta el entorno con el que contaba las pensiones obligatorias.

Jara, Gómez, & Pardo (2005) consideraron que hay elementos muy importantes que termina por influir en la construcción de la frontera, elementos que se consideraron como problemas reales, en pocas palabras la construcción de la frontera eficiente se puede ver con un modelo de factores, factores que son entendidos como los problemas que ellos identifican.

Jara, Gómez, & Pardo (2005) incluyeron que los problemas reales que se presentaba eran fricciones de mercado (prima de riesgo), costos de transacción, costos de entrada a mercados nuevos y por último el impacto de la regulación. Al tener en cuenta ya estos problemas se tendría mucho más cuidado para la elección del portafolio eficiente ya que los llevaba a incluir pruebas de

robustez. Con este aporte se logra decir que las pensiones obligatorias en Colombia han presentado con el pasar del tiempo cambios, los cuales han sido para mejorar la eficiencia en su portafolios, pero aun se siguen encontrado falencias en la construcción de los portafolios eficientes, ya que los estudios presentado hasta el momento siguen insistiendo de que hay ineficiencia en la regulación por que los limites de inversión actuales no son lo más eficientes para los ahorradores colombianos.

Según las cifras de la Superintendencia Financiera, a abril de 2012 en Colombia hay cerca de 16.725.477 afiliados a pensión obligatoria, de ellos 46% está activo y 54% inactivo, es decir desde hace más de seis meses no hacen aportes.

Dados estos resultados y la implicación que tiene que los colombianos dejen de cotizar para su pensión, las AFP se han puesto a

la tarea de ayudar a las personas a conocer conceptos claves y a orientar para toma de decisiones. Esta orientación seria darles a los ahorradores una nueva visión con cada uno de las Multifondos, y que sus decisiones se base en la tolerancia que tenga frente al riesgo y a la información simétrica que se les pueda brindar.

### **Justificación**

Este trabajo se realiza para dar una nueva visión a los ahorradores de pensiones obligatorias por cada Multifondos, ya que la eficiencia en los portafolios de los Multifondos no ha presentado resultados de máxima rentabilidad, si no que ha tenido una rentabilidad mínima regida por la ley.

Con la aplicación del MBL para cada uno de los Multifondos, se llegara a dar una nueva interpretación al ahorrador en el momento de escoger su portafolio, ya que el objetivo principal es que

el ahorrador tenga presente el concepto de portafolio y mucho más los portafolios que ofrecen las AFP, los ahorros son los que se están optimizando bajo el enfoque de Media-Varianza y bayesiano, donde con el enfoque bayesiano se espera obtener unos views dados unos cambios de ciclos y de regímenes y no solo bajo información histórica. Al presentarse ya información simétrica a los inversionistas (ahorradores) tendrían ya el criterio de escoger el portafolio óptimo bajo su nivel de tolerancia al riesgo.

### **Pregunta:**

¿Qué Multifondo es el más rentable para los ahorradores de pensiones obligatorias?

### **Tema**

Optimización de portafolios con enfoque bayesiano, MBL.

### **Metodología**

En esta parte del estudio se pretende aplicar el MBL para la construcción y gestión estratégica de los FPO en Colombia. Para el proceso de inversión basado en el MBL se realizarán los siguientes pasos:

- Determinar los activos que constituyen el portafolio de mercado
- Calcular la matriz de covarianzas históricas de cada uno de los activos
- Calcular los retornos implícitos para los activos
- Combinar los retornos implícitos con las opiniones teniendo en cuenta el MBL
- Introducción de las estimaciones de retornos y covarianzas, generadas por el MBL al optimizar el portafolio.
- Establecer las restricciones de inversión que toma el administrador del portafolio.
- Seleccionar el portafolio eficiente que se adecua con las preferencias de riesgo del administrador



Este trabajo se realizara utilizando un portafolio representativo para cada Multifondo, teniendo en cuenta la última regulación propuesta por Ministerio de Hacienda y Crédito Público, la cual nos da un rango de participaciones para cada clase de activo para cada tipo de fondo.<sup>2</sup>

## Datos

Los datos a utilizar en este trabajo serán similares a los activos e índices mensuales seleccionados por Leon y Laserna (2008). Las series de tiempo a trabajar son las variables COLTES, con el índice de TES del correval, y la tasa de intervención del Banco de la República de Colombia (IBR), Barclays Global Aggregate Index como renta fija Internacional, Colcap como renta variable nacional y por ultimo MXWO Index como renta variable internacional.

Las series de tiempo de cada uno de los activos comprende un rango de tiempo desde el 2002 hasta agosto del año en curso, las observaciones son mensuales y para un total de 129 datos.

Con base en la serie histórica de Barclays Global Aggregate, la cual se toma como renta fija internacional, se realizo un análisis de cobertura de riesgo cambiario. Se tomo como instrumento financiero de cobertura un forward a un mes de tipo dólar-peso y el spot del día correspondiente, esta serie está comprendida entre abril de 2000 y agosto de 2013.

Se observo un retorno del 0.5% sin cobertura y con este, 3.65% de riesgo. Al realizar el análisis de la cobertura de tipo de cambio se obtienen los resultados evidentes en el grafico 1 y 2 en el apéndice 1. En el grafico se concluye que el punto eficiente dentro de la frontera se ubica en el retorno 0.78% con un riesgo del 1.73%, para esto es necesario un 100% de cobertura.

Por otro lado, se realiza el análisis de riesgo de tipo de cambio para la renta variable internacional, para la cual se toma el índice MSCI World Index EFTs. Al igual que en la renta fija internacional, la cobertura se realiza con un forward de un mes de tipo dólar-peso. El retorno total sin cobertura arroja un valor negativo (-0.1%) para el periodo comprendido entre enero del 2000 y agosto de 2013, con un riesgo

---

<sup>2</sup> Resolución Ministerial rentabilidad mínima AFP

equivalente al 4.2%. En grafico 3 y 4 en el apéndice 1 se observa que a diferencia de la renta fija internacional, la renta variable es eficiente en un 4 % de riesgo, el cual tiene un 0.2% de retorno, con un 40% de cobertura. Pero si se obtuviera una cobertura del 90% el riesgo sería de 4.75% y 0.62% de retorno.

Al obtener ya una cobertura para la inversión internacional seguimos con la construcción de la matriz de covarianza, que se encuentra como tabla 2 en el apéndice 2. El siguiente paso fue la obtención de las capitalizaciones de cada uno de los Multifondos, las cuales se realizaron de acuerdo a Markowitz con su teoría rentabilidad-riesgo, y desarrolladas con las restricciones propuesta por el Ministerio de Hacienda.

Estas capitalizaciones se manejaron también bajo supuesto del Shaper-Ratio, el cual nos ayuda a comparar la optimización adecuada para cada Multifondo. Las soluciones arrojadas por Solver se encuentran en las tablas 3 en el apéndice 3, y en la tabla 4 la solución del Shaper-Ratio para cada Multifondo de acuerdo a su fórmula, donde esta nos da una medida del exceso de

rendimiento por una unidad de riesgo que se obtenga de la inversión:

$$S = \frac{E(R-R_f)}{\sigma} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{var(R - R_f)} \quad (3)$$

Estas optimizaciones fueron tomadas ya que de acuerdo a varios estudios realizados para los FPO las capitalizaciones propuestas son ineficientes. Al comparar las nuevas ponderaciones bajo el enfoque media- varianza con las del Fondo de Pensiones de Skandia, la diversificación es más amplia y sus ponderaciones son dentro del rango pero mucho menores a las ponderaciones propuestas por este trabajo. Véase en la tabla 5 en el apéndice 3.

Ya con las capitalizaciones se supondrá que son estratégicas y deseadas por el FPO en Colombia. También se asumirá, como es común en la literatura del tema, que el coeficiente  $\tau$  se fijara en un valor de 0.025 como es común en la literatura y en la práctica de los inversionistas extranjeros.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Modelo Black Litterman. Aplicación a los FPO.  
pdf

Respecto al coeficiente de aversión al riesgo se asigna estratégicamente una tasa libre de riesgo de los Treasury de 3 meses. Este coeficiente de aversión de riesgo fue elaborado con una serie mensual desde agosto de 2002 hasta agosto de 2013 y convertido en un coeficiente diario el cual fue de 0.13%.

Es importante tener en cuenta los datos anteriores para la obtención de los retornos de equilibrio implícito  $\pi$ , retornos que son encontrados con la metodología de MBL de formas matricial. En el apéndice 4 se encuentra las tablas 6, 7 y 8, la cual presenta para cada activo los retornos históricos y los retornos implícitos.

Al obtener ya estos retornos seguimos con la construcción de los views donde de acuerdo con la teoría del enfoque bayesiano esta es una de las ventajas de la estimación de optimización de portafolios con el MBL, ya que el inversionista tiene la opción de colocar sus perspectivas de retornos que podría obtener en la inversión propuesta. En el caso de las pensiones obligatorias los views fueron escogidos y manejado de acuerdo a modelos econométricos financieros.

El enfoque bayesiano describe las probabilidades en términos de pronóstico e incertidumbre, mientras que el enfoque frecuentista estima las probabilidades a partir de la frecuencia relativa asociada a la ocurrencia del evento con respecto a la muestra. Una de las principales ventajas de utilizar un modelo bayesiano para optimización de portafolios es que permite combinar diversos pronósticos de retornos de los activos (“prior information”) con la información muestral (datos históricos) y por esta ventaja se realiza en este trabajo pronósticos tanto para la renta fija como la renta variable, bajo modelos econométricos.

Para los cinco activos se manejaron modelos diferentes y perspectivas de analistas financieros. Para la renta fija nacional se manejó un modelo ARIMA, modelo Autoregresivo con un AR 2 y 12 y con un MA 2 y 12. El modelo ARIMA fue escogido por su ventaja de pronóstico y dinamismo en series temporales.

La serie inflación (IPC) fue manejada para la obtención del view del COLTES, donde con la regla de Taylor se obtendría la tasa interbancaria con la cual se daría

una noción del rendimiento que se podría obtener en un futuro. La serie IPC fue utilizada con la segunda diferencia del logaritmo natural y se utilizó el programa Eviews, donde en el apéndice 5 se encontramos la tabla 9, y en ella se observa el modelo AR 2,12 Y MA 2,12 el cual fue el más adecuado de acuerdo a varios estudios que se realizaron después de la revisión del Correlograma. Al tener el modelo adecuado a su significancia se realizó tres pruebas más para la confirmación, las cuales fueron pruebas de raíz unitaria.

La raíz unitaria nos da como hipótesis nula que la serie tiene estacionalidad, donde de las tres pruebas, dos de ella nos dice que la serie es estacionaria, estas pruebas se encuentran en el apéndice 5 tablas 10, 11,12 y 13. Al ya tener la confirmación de que la serie era estacionaria se realiza el pronóstico de 12 meses adelante el cual se encuentra en el apéndice 6 tabla 14. El pronóstico obtenido para septiembre 2014 es de 1.90% variación anual y del mes agosto es de 0.06%.

Con la siguiente ecuación, la cual es la regla de Taylor se realizara la estimación de la tasa de interés

interbancaria la cual nos dirá que rendimiento se podría obtener en un año.

$$i_t = \pi_T + r_t^* + \alpha_y(y_t - \bar{y}) + \alpha_\pi(\pi_T - \bar{\pi}) \quad (4)$$

Donde  $\bar{y}$  es el PIB de equilibrio, el cual es el promedio histórico de la serie en nuestro caso del año 2013.  $\pi_T$  es la inflación actual,  $\bar{\pi}$  meta de largo plazo de la inflación,  $y_t$  es el PIB de hoy y por último  $r_t^*$  es la tasa de interés interbancaria de hoy. Estos datos se encontraron en el Banco de la Republica y otros fueron pronosticados, los datos serían los siguientes:

Tabla (15)

Variables	Valores
$\bar{y}$	3.96%
$\bar{y}_t$	4.20%
$\pi_T$	2.27%
$\bar{\pi}$	3.00%
$r_t^*$	3.25%
$\alpha_y$	0.633
$\alpha_\pi$	0.973

Fuente: estimaciones propias y datos del Banco de la Republica.

Al reemplazar los valores en la regla de Taylor y teniendo en cuenta que los intercepto fueron

encontrados por medio de una regresión lineal, se obtiene que la tasa de interés que se esperaría para un futuro es de 4.96% variación anual, en el mes sería de 0.41%, donde este dato sería los views para los COLTES y el IBR de este modelo de BL.

Para el tercer y cuarto views que son para la renta variable nacional e internacional, se utilizara el modelo de Gordon y Shapiro, el cual no da una noción de dividendos crecientes a una tasa de crecimiento constataste y la formula a aplicar es:

$$p_0 = \frac{D_1}{k-g} \quad (5)$$

Donde  $p_0$  es el valor teórico de la acción;  $D_1$  dividendo anticipado del primer periodo;  $k$  tasa de descuento de mercado y  $g$  tasa de crecimiento del mercado.

A despejar de la ecuación  $g$  y al reemplazar los datos que se encuentra en el apéndice 7 en la tablas 16 y 17, se obtiene los views para la renta variable nacional e internacional. Al desarrollar la ecuación de modelo de Gordon y Shapiro se encuentra que entre la

renta nacional e internacional hay una correlación, lo cual hace que sus views sean de 3.22% en variación anual y para este caso mensual sería de 0.27% para la Renta Variable Nacional y para la internacional es de 1.27% anual y mensual de 0.11%.

Al obtener ya los views se realiza la estimación de los nuevos retornos de MBL los cuales se observa en la tabla 17, 18 y 19, donde están los retornos para cada uno de los Multifondos, y también se encuentra la diferencia de los nuevos retornos con los retornos de equilibrio implícito, la cual nos da a entender que los retornos del MBL aumentan en comparación al retorno implícito de equilibrio debido a la opinión positiva que se realiza sobre los activos.

Por otra parte se presenta una diferencia negativa en los COLTES en los tres Multifondos, debido a que los retornos por parte del MBL ha castigado fuertemente su expectativa hacia el futuro lo que hace que sean menores que las del equilibrio.

Tabla 18. Diferencia entre los retornos de MBL y los retornos implícitos del Multifondo Conservador.

	RETORNOS DE EQUILIBRIO COSERVADOR $\pi$	Vector de retornos de Black-Litterman $n \mu$	DIFERENCIA $\mu - \pi$
<b>CONSERVADOR</b>			
COLCAP	0,09%	0,27%	0,17%
MORGAN STANLEY	0,08%	0,11%	0,03%
IBR	0,02%	0,42%	0,40%
GLOBAL AGGREGATE BOND	0,20%	0,42%	0,22%
COLTES	0,29%	0,08%	-0,21%

Tabla 19. Diferencia entre los retornos de MBL y los retornos implícitos del Multifondo Moderado.

	RETORNOS DE EQUILIBRIO COSERVADOR $\pi$	Vector de retornos de Black-Litterman $n \mu$	DIFERENCIA $\mu - \pi$
<b>MODERADO</b>			
COLCAP	0,06%	0,27%	0,21%
MORGAN STANLEY	0,16%	0,11%	-0,05%
IBR	0,02%	0,42%	0,40%
GLOBAL AGGREGATE BOND	0,13%	0,42%	0,29%
COLTES	0,59%	0,08%	-0,51%

Tabla 20. Diferencia entre los retornos de MBL y los retornos implícitos del Multifondo Amante.

	RETORNOS DE EQUILIBRIO COSERVADO $R \pi$	Vector de retornos de Black-Litterman $n \mu$	DIFERENCIA $\mu - \pi$
<b>AMANTE</b>			
COLCAP	0,16%	0,27%	0,11%
MORGAN STANLEY	0,08%	0,11%	0,03%
IBR	0,00%	0,42%	0,42%
GLOBAL AGGREGATE BOND	0,09%	0,42%	0,33%
COLTES	0,78%	0,08%	-0,70%

Con las tablas anteriores se termina por observar que en los tres Multifondos los retornos del MBL son positivos frente a los implícitos, lo cual hace que en este ejercicio de optimización con restricciones en los activos sean más líquidos y reciban más ponderaciones, y que los que no son tan líquidos sean castigados en sus ponderaciones en este caso los COLTES.

Al terminar la construcción del MBL para los Multifondos, se realiza una comparación entre los Multifondos propuestos con los obtenidos en este trabajo. Esta comparación se realizó por medio Sharpe-Ratio, la cual se encuentra en el apéndice 8 en la tabla 20 y en el cual se observa que la

optimización con el MBL es más rentable que los dados por las AFP.

## **Conclusión**

De acuerdo con el MBL es una herramienta muy útil para la construcción de portafolios en especial para los administradores estrategias de los fondos de pensiones. La mayor ventaja que se obtiene con el MBL es que se puede enfrentar a los grandes problemas que se presentan en la toma de decisiones de inversión. El MBL nos permite controlar y hacer recomendaciones consistentes con las expectativas del inversionista.

Para el caso de los FPO colombianos, la aplicación del MBL produce portafolios más diversificados e intuitivo en las decisiones de inversión. Al realizar la elaboración del MBL para cada Multifondo se llega a varias conclusiones.

La primera que la regulación propuesta por la AFP es ineficiente y que a pesar de realizar la optimización de las ponderaciones con enfoque rentabilidad- riesgo en este trabajo, se sigue notando que la regulación propuesta por el Ministerio de Hacienda es ineficiencia.

La segunda conclusión es que la selección de los activos presenta grandes expectativas en el retorno esperado y la volatilidad que presenta, lo cual hace que el riesgo comience a tomar decisiones equivocadas en la selección de los activos y mucho más en los renta internacional, por esta razón en este trabajo se decide tomar como opción la cobertura y una cobertura al 100%.

La tercera es que los views se pueden manejar al criterio del inversionista pero siempre teniendo en cuenta la situación del mundo real y con expectativas al futuro, en

pocas palabras con enfoque bayesiano, el cual nos ayuda a dar unas probabilidades de pronóstico. Para este caso se manejaron dos modelos un ARIMA para la renta fija y un modelo de dividendos crecientes a tasa constante para la renta variable. Los cuales fueron escogidos por su facilidad de pronóstico y de intuición, pero el inversionista es libre de esta decisión.

Por otra parte se observa que los retornos implícitos y los retornos del MBL son mucho más positivos los del MBL, lo cual nos hace pensar dos cosas: la primera que la optimización con el MBL es mas precisa y con mejores estimaciones a los retornos futuros y la segunda que la creación de los tres multifondos son innecesaria, que deberían solo existir dos, debido a la fuerte correlación que se encuentra entre el moderado y el conservador. Los portafolios

adecuados para los ahorradores sería el moderado y el de mayor riesgo ya que entre el moderado y el conservador son similares y el de amante al riesgo nos muestra una buenas expectativas en los retornos a un largo plazo.

Por último se responde a la pregunta de este trabajo y su respuesta es que las personas jóvenes que comienza a cotizar sus pensiones deberían tener toda la información respecto a los tres Multifondos donde su mejor opción sería el de mayor riesgo ya que su horizonte de inversión es de mucho más largo plazo, lo cual hace que los resultados puedan variar y al final a lo largo del tiempo se puede obtener una mayor rentabilidad.

Estas expectativas para los ahorradores jóvenes le servirían mucho, ya que con la metodología del MBL se logra obtener una buena probabilidad de



acercamiento a la rentabilidad futura.

## Referencias

- Castillo, M. 2006. *Toma de Decisiones en las Empresas: entre el arte y la técnica*, Universidad los Andes, Bogotá.
- Black, Fischer and Litterman, Robert. 1992. “Global portfolio optimization”. *Financial Analysts Journal*; Sep/Oct 1992; 48, 5; ABI/INFORM Global pg. 28.
- Grinold, R. 1999. *Mean-Variance And Scenario-Based Approaches To Portfolio Selection*.
- Idzorek, T. 2002. ‘Portfolio “Optimizer Overview”’ disponible en [http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453\\_2006/Portfolio\\_optimizer\\_overview.doc](http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Portfolio_optimizer_overview.doc), 2002
- Idzorek, T. 2004. “A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating”.
- user specified confidence levels’, Zephyr Associates.ING; Estados financieros, 2011, Disponibles en: [https://www.ing.com.co/ps/portal/HomeING/!ut/p/c5/04\\_SB8K8xLLM9MSzPy8xBz9CP0os\\_ggR8fgQG93QwODUGcTA093\\_1BzP1cvY0djI30\\_j\\_zcVP2CbEdFAFbZ4iE!/dl3/d3/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/](https://www.ing.com.co/ps/portal/HomeING/!ut/p/c5/04_SB8K8xLLM9MSzPy8xBz9CP0os_ggR8fgQG93QwODUGcTA093_1BzP1cvY0djI30_j_zcVP2CbEdFAFbZ4iE!/dl3/d3/L2dBISEvZ0FBIS9nQSEh/)
- Markowitz, Harry.1952. *Portfolio Selection*.
- Markowitz, H. 2000. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*: Frank J

- Fabozzi Associates,  
Pennsylvania.
- Jara, Diego. 2006. Modelo de regulación de las AFP en Colombia y su Impacto en el Portafolio de los Fondos de Pensiones, Borradores de Economía, Banco de la República, 10 Octubre.
  - Jara, Gómez & Pardo. 2005. Análisis de eficiencia de los portafolios de pensiones obligatorias en Colombia. *Banco de la Republica (Septiembre)*.
  - Moreno Y Olmeda. 2012. Empleo De Medidas De Performance En La Evaluación De Fondos De Inversión.
  - Pagina web:  
<http://www.superfinanciera.gov.co/>
  - Pagina web:  
<http://www.crecenegocios.com/perfil-del-inversionista/>
  - Piraquive., Jiménez., Malaver y Rivera. 2011. “Documento de investigación; Análisis estratégico sector fondos de pensiones en Colombia”. *University Rosario Business School Research Paper No. 109, (Septiembre)*.
  - Trujillo, Mateo. 2009. Tesis de pregrado. *Construcción Y Gestión De Portafolios Con El Modelo Black-Litterman: Una Aplicación A Los Fondos De Pensiones Obligatorias En Colombia*

## Apéndice 1

Grafico 1. Rentabilidad y riesgo del activo Barclays Global Aggregate, con cobertura.

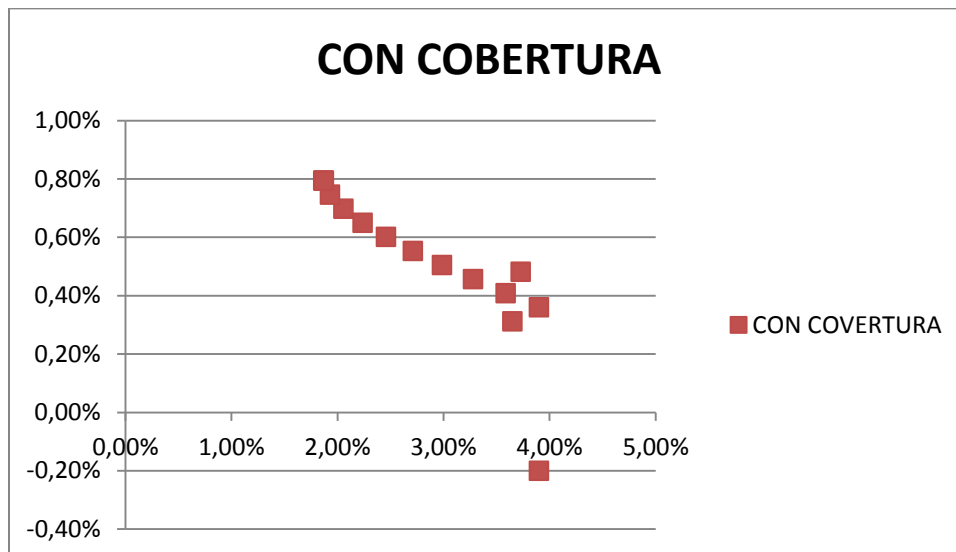


Grafico 2. Rentabilidad y riesgo del activo Barclays Global Aggregate, sin cobertura.

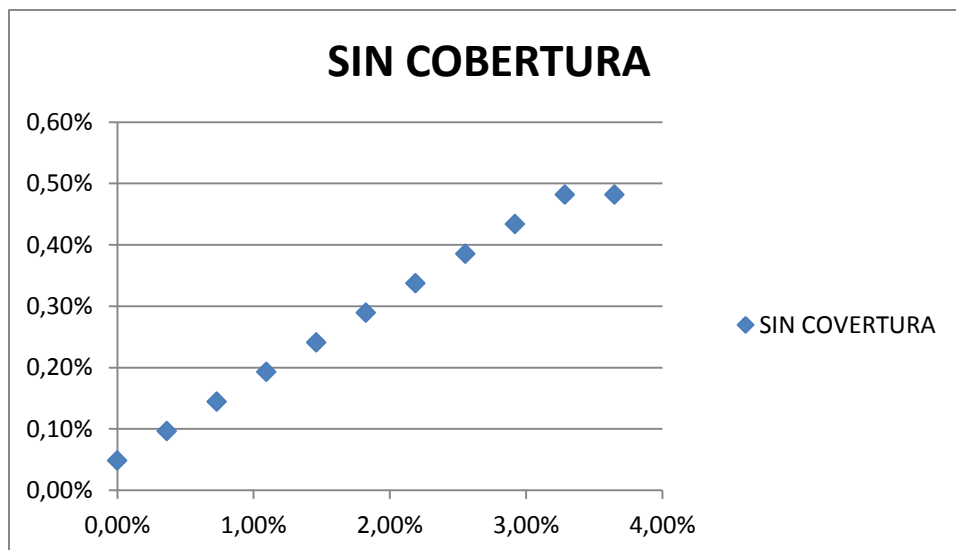


Grafico 3. Rentabilidad y riesgo del índice MSCI World Index EFTs. Con cobertura.

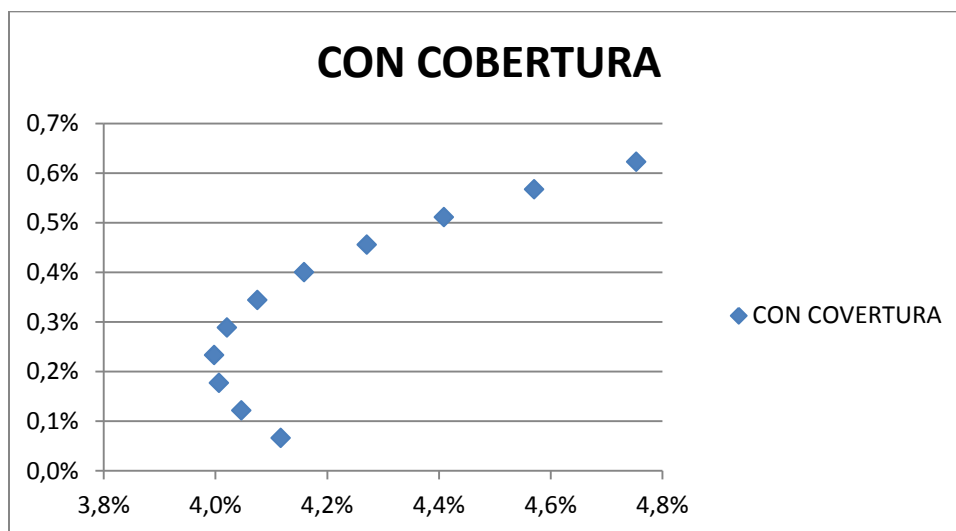
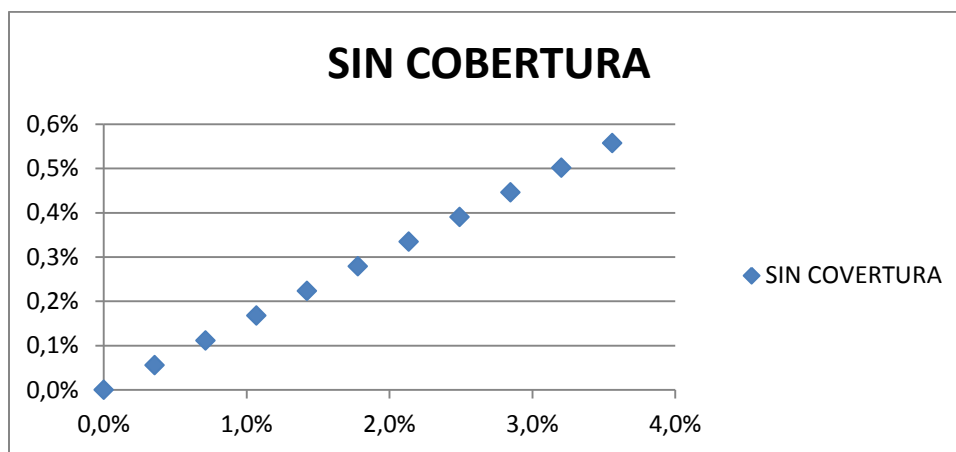


Grafico 4. Rentabilidad y riesgo del índice MSCI World Index EFTs. Sin cobertura



## Apéndice 2.

Tabla2. Matriz de covarianza

	<i>MXWO</i>	<i>BARCLAYS</i>	<i>IBR</i>	<i>COLTES</i>	<i>COLCAP</i>
<b>MXWO</b>	0,2260%	0,0264%	-0,0014%	-0,0005%	0,1407%
<b>BARCLAYS</b>	0,0264%	0,0351%	0,0003%	-0,0002%	0,0329%
<b>IBR</b>	-0,0014%	0,0003%	0,0003%	0,0000%	-0,0005%
<b>COLTES</b>	-0,0005%	-0,0002%	0,0000%	0,3631%	0,0003%
<b>COLCAP</b>	0,1407%	0,0329%	-0,0005%	0,0003%	0,4401%

## Apéndice 3.

Tabla 3. Capitalizaciones de cada Multifondo.

<b>CLASE DE ACTIVOS</b>		<b>W conservador</b>	<b>W moderado</b>	<b>W amante</b>
<b>COLCAP</b>	renta variable local	15%	10%	25%
<b>MORGAN STANLEY</b>	renta variable internacional	10%	20%	10%
<b>IBR</b>	deposito a la vista	5%	5%	0%
<b>GLOBAL AGGREGATE BOND</b>	renta fija internacional	55%	35%	25%
<b>COLTES</b>	renta fija local	15%	30%	40%

Tabla 4. Shaper-Ratio

### Conservador

Varianza portafolio	0,13%
Volatilidad portafolio	3,63%
Rentabilidad portafolio	0,69%

R. Libre de riesgo	0,13%
Sharpe	0,153949

## Moderado

Varianza portafolio	0,10%
Volatilidad portafolio	3,16%
Rentabilidad portafolio	0,06%
R. Libre de riesgo	0,13%
Sharpe	0,0214010

## Amante

Varianza portafolio	0,14%
Volatilidad portafolio	3,72%
Rentabilidad portafolio	0,16%
R. Libre de riesgo	0,13%
Sharpe	-0,0069119

## Apéndice 4

Tabla 6. Vector de retornos históricos de cada activo (mensual)

	<b>RETORNOS HISTORICOS <math>\mu</math></b>
<b>MXWO</b>	0,62%
<b>BARCLAYS</b>	0,79%
<b>IBR</b>	0,50%
<b>COLTES</b>	0,36%
<b>COLCAP</b>	1,95%

Tabla 7. Vector de retornos históricos de cada Multifondo (mensual)

	<b><math>\mu</math> COSERVADOR</b>	<b><math>\mu</math> MODERADO</b>	<b><math>\mu</math> AMANTE</b>
<b>MXWO</b>	0,09%	0,06%	0,16%
<b>BARCLAYS</b>	0,08%	0,16%	0,08%
<b>IBR</b>	0,02%	0,02%	0,00%
<b>COLTES</b>	0,20%	0,13%	0,09%
<b>COLCAP</b>	0,29%	0,59%	0,78%

Tabla 8. Vector de retornos en exceso esperado de cada Multifondo (mensual)

	<b><math>\pi</math> conservador</b>	<b><math>\pi</math> moderado</b>	<b><math>\pi</math> amante</b>
<b>COLCAP</b>	0,05%	0,08%	0,02%
<b>MORGAN STANLEY</b>	0,01%	0,02%	0,00%
<b>IBR</b>	0,00%	0,00%	0,00%
<b>GLOBAL AGGREGATE BOND</b>	0,16%	0,15%	0,02%
<b>COLTES</b>	0,07%	0,18%	0,04%

## Apéndice 5

Tabla 9. Correlograma IPC

Date: 09/06/13 Time: 11:13  
Sample: 2002M01 2013M07  
Included observations: 138




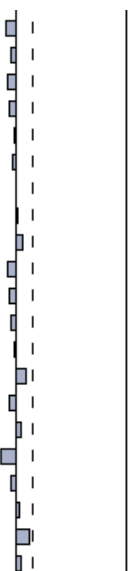
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.638	0.638	57.394	0.000
		2	0.270	-0.231	67.747	0.000
		3	-0.001	-0.116	67.747	0.000
		4	-0.173	-0.110	72.077	0.000
		5	-0.340	-0.242	88.919	0.000
		6	-0.420	-0.132	114.72	0.000
		7	-0.356	-0.018	133.36	0.000
		8	-0.208	-0.010	139.79	0.000
		9	-0.010	0.083	139.81	0.000
		10	0.239	0.212	148.42	0.000
		11	0.489	0.277	184.73	0.000
		12	0.589	0.176	237.84	0.000
		13	0.410	-0.123	263.87	0.000
		14	0.151	-0.075	267.45	0.000
		15	-0.067	-0.052	268.15	0.000
		16	-0.252	-0.091	278.21	0.000
		17	-0.391	-0.046	302.61	0.000
		18	-0.456	-0.081	336.01	0.000
		19	-0.395	-0.052	361.36	0.000
		20	-0.231	-0.004	370.08	0.000
		21	-0.024	-0.026	370.18	0.000
		22	0.206	0.016	377.22	0.000
		23	0.389	0.022	402.61	0.000
		24	0.463	0.072	438.93	0.000
		25	0.319	-0.073	456.34	0.000
		26	0.094	-0.050	457.88	0.000
		27	-0.114	-0.043	460.14	0.000
		28	-0.268	-0.012	472.73	0.000
		29	-0.335	0.098	492.58	0.000
		30	-0.389	-0.060	519.61	0.000
		31	-0.309	0.062	536.84	0.000
		32	-0.207	-0.137	544.62	0.000
		33	-0.032	-0.046	544.81	0.000
		34	0.186	0.037	551.26	0.000
		35	0.403	0.125	581.76	0.000
		36	0.465	0.064	622.68	0.000



Tabla 10. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller

Null Hypothesis: INFLACIOL has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.340758	0.6093
Test critical values: 1% level	-3.478911	
5% level	-2.882748	
10% level	-2.578158	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(INFLACIOL)  
 Method: Least Squares

Tabla 11. Prueba raíz unitaria DF-GLS

Null Hypothesis: INFLACIOL has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=13)

	t-Statistic
Elliott-Rothenberg-Stock DF-GLS test statistic	2.088182
Test critical values: 1% level	-2.582076
5% level	-1.943193
10% level	-1.615157

\*MacKinnon (1996)

DF-GLS Test Equation on GLS Detrended Residuals  
 Dependent Variable: D(GLSRESID)  
 Method: Least Squares

Tabla 12. Prueba de raíz unitaria Phillips- Perron

Null Hypothesis: INFLACIOL has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Bandwidth: 2 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-1.590678	0.4846
Test critical values:		
1% level	-3.478189	
5% level	-2.882433	
10% level	-2.577990	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		
Residual variance (no correction)		0.095142
HAC corrected variance (Bartlett kernel)		0.191571

#### Phillips-Perron Test Equation

Tabla 13. ARIMA (2,12; 2,12)

Dependent Variable: IPC2  
 Method: Least Squares  
 Date: 09/16/13 Time: 11:10  
 Sample (adjusted): 2003M03 2013M08  
 Included observations: 126 after adjustments  
 Convergence achieved after 15 iterations  
 MA Backcast: 2002M03 2003M02

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	-0.055502	0.023039	-2.409016	0.0175
AR(12)	0.922924	0.022087	41.78598	0.0000
MA(2)	-0.083170	0.038886	-2.138845	0.0344
MA(12)	-0.881831	0.032550	-27.09155	0.0000
R-squared	0.643310	Mean dependent var		-9.83E-05
Adjusted R-squared	0.634538	S.D. dependent var		0.002109
S.E. of regression	0.001275	Akaike info criterion		-10.46066
Sum squared resid	0.000198	Schwarz criterion		-10.37062
Log likelihood	663.0219	Hannan-Quinn criter.		-10.42408
Durbin-Watson stat	2.580727			
Inverted AR Roots	.99	.86-.50i	.86+.50i	.49-.86i
	.49+.86i	.00-1.00i		
Inverted MA Roots	1.00	.86+.49i	.86-.49i	.50-.85i
	.50+.85i	.00-.98i	-.00+.98i	-.50-.85i
	-.50+.85i	-.86+.49i	-.86-.49i	-1.00

## Apéndice 6

Tabla 14. Pronostico del IPC

	mes	ln	1 diferencia	pronostico	variación anual
2013	Septiembre	16.2487716	0.066%	0.00024679	2.09%
	Octubre	16.2496181	0.085%	0.00019148	2.07%
	Noviembre	16.2511578	0.154%	0.00069328	2.13%
	Diciembre	16.2532561	0.210%	0.00055853	2.16%
2014	Enero	16.2570021	0.375%	0.00164773	2.21%
	Febrero	16.2613682	0.437%	0.00062006	2.21%
	Marzo	16.2623103	0.094%	- 0.00342397	2.20%
	Abril	16.2626895	0.038%	- 0.00056296	2.07%
	Mayo	16.2641864	0.150%	0.00111778	2.02%
	Junio	16.2656192	0.143%	-6.42E-05	1.94%
	Julio	16.2664514	0.083%	- 0.00060047	1.87%
	Agosto	16.2670944	0.064%	- 0.00018925	1.90%

## Apéndice 7

Tabla 16. Variables nacionales para del Modelo de Gordon y Shapiro

Renta Nacional	Variable	
	$p_0$	3.23%
	$D_1$	3.22%
	$k$	4.22%

Tabla 17. Variables nacionales para del Modelo de Gordon y Shapiro

Renta Variable Internacional	
$p_0$	2.86%
$D_1$	2.94%
$k$	2.30%

Apéndice 8. Ecuación de Sharp -  
Ratio

$$S = \frac{E[R - R_f]}{\sigma}$$

,